代数幾何学シンポジウム記録
1994年度 pp.124-131

平面6次曲線に沿って分岐する dihedral Galois coverings について

高知大 理 徳永浩雄

Introduction

この稿では Galois 群が 2 面体群 $\mathcal{D}_{2n}$ であるような分岐被覆に関し最近わかった結果（係数体はすべて複素数）を報告する。また，詳細は今準備中の論文で述べることにしてここでは概略を述べるだけに止める．まず、記号や言葉の準備から始める。

定義 $\pi : X \longrightarrow Y$ は非特異射影多様体 Y の有限分岐被覆とする。X の有理関数体 $\mathbf{C}(X)$ が Y の有理関数体 $\mathbf{C}(Y)$ の Galois 拡大で、 Galois 群 $Gal(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}(Y))$ が 2 面体群であるとき、これを dihedral Galois covering という。特に、 Galois 群を明記するとき、 dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ covering と呼ぶ。

ここでは論文 [T] で展開した dihedral Galois covering を如何にして構成するかということに一般論を $\mathbf{P}^2$ の既約 6 次曲線に沿って分岐する dihedral Galois covering に関して適用する．まず，最初に出てくる素朴な疑問は既約な 6 次曲線で dihedral Galois covering の branch locus になるものはどれくらいあるかということである．この問題を考える理由のひとつとして, 例えば，既約な 6 次曲線 C に沿って分岐する dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ covering があれば，基本群 $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$ は非可換群となるが，このような曲線の具体例は見つけるのが比較的難しいこと等が挙げられる．このことから，dihedral Galois covering の branch locus となりうる既約 6 次曲線にはその特異点の形状においてかなりの制約があることが予想される．

さて，基本的にはすべての既約 6 次曲線を扱うことが理想であるが，これはかなり難しい問題のように思える．従って，本稿では次の 2 条件を満たす 既約 6 次曲線に扱う対象を限定する．

仮定 1. 特異点は高々 simple.

仮定 2. 少なくともひとつは 3 重点を持つ．

注意 1. ここで特異点が simple というのは局所的な定義方程式が次

のいずれかになることである.

$$
\begin{aligned}
a_n: \quad y^2 + x^{n+1} &= 0 \ (n \geq 1) \\
d_n: \quad x(y^2 + x^{n-2}) &= 0 \ (n \geq 4) \\
e_6: \quad x^3 + y^4 &= 0 \\
e_7: \quad y(y^2 + x^3) &= 0 \\
e_8: \quad x^3 + y^5 &= 0
\end{aligned}
$$

注意 2. 仮定 2 には完全に技術的な条件であり，最終的には取り除くことが望ましいが今のところ，そのメドは立っていない.

さて，以上の準備のもと，我々の最初の結果は次の通りである.

定理 1. $\pi : S \longrightarrow \mathbf{P}^2$ は dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ covering で (i) n は奇数， (ii) branch locus $\Delta(S/\mathbf{P}^2)$ は上記 2 条件を満たす既約 6 次曲線, という 2 条件を満たすものとすれば，$n = 3$ である.

これから結局，定理の仮定を満たすような dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ covering は実は Galois 群が 3 次対称群 $\mathcal{S}_3$ のときのみ存在する可能性が出てくる. このような covering は実際に存在することがわかる. 以下，このような covering に関して述べるが，その前にひとつ言葉を定義する.

定義 既約 6 次曲線 C が 仮定 1 を満たすときその index を

$$
i(C) = \sum_{x \in Sing(C)} \text{the Milnor number of } x
$$

と定義する.

この index の定義は [P] による.

さて, 既約な 6 次曲線 C が仮定 1 を満たすとき，C に沿って分岐する double covering の minimal resolution は K3 曲面となるのでその Picard 数は 20 以下であるこれから

$$
0 \leq i(C) \leq 19
$$

がわかる (cf [P]).

定義. (Persson) 仮定 1 を満たす既約な 6 次曲線 C の index が 19 であるとき C は既約な maximizing sextic であるという.

仮定 1, 2 を満たす 既約 6 次曲線に沿って分岐する dihedral $\mathcal{D}_6$ covering (以下, $\mathcal{S}_3$ covering と呼ぶ.) を考える際, index をひとつのものさしとして考えていくことにすれば, まず最初のステップとして maximizing sextic について考えるのが妥当であると思えるが, この場合には次の定理が成立する.

定理 2 B は仮定 1, 2 を満足する既約な maximizing sextic とする. C の特異点のうち e_6 または $a_{3k-1}(k \geq 1)$ であるものが 3 つ以上あれば $\mathcal{S}_3$ covering $\pi : S \longrightarrow \mathbf{P}^2$ で その branch locus $\Delta(X/Y) = B$ となるものが存在する.

系. C は定理 2 の条件を満足する既約 6 次曲線とする. すると$\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$ は非可換である.

注意. 一般に, C の特異点の形状だけで, $\mathcal{S}_3$ covering の存在はわからない. 例えば, 仮定 1 を満たす既約 6 次曲線で index が 12, 14, 15, 16, 18 のときは特異点の形状が全く等しいペア C_1, C_2 で C_1 に沿って分岐する $\mathcal{S}_3$ covering の存在はするが, C_2 に沿って分岐するような $\mathcal{S}_3$ covering は存在しないような例が存在する. このような曲線のペアは Zariski pair と呼ばれる ([B]) 参照.

§1. dihedral Galois covering

まず最初に [T] の結果を簡単にまとめる.

$\pi : X \longrightarrow Y$ は dihedral D_{2n} covering とする. $\mathcal{D}_{2n} = \langle \sigma, \tau | \sigma^2 = \tau^n = (\sigma\tau)^2 = e \rangle$ として, $D(X/Y)$ を Y の $\mathbf{C}(X)^\tau$ - normalization ($\mathbf{C}(X)^\tau$ は τ による不変体を表す) とすれば, $D(X/Y)$ は Y の double covering で

次の可換図式を満たす.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ & \searrow \beta_2 & \\ \pi \downarrow & & D(X/Y) \\ & \swarrow \beta_1 & \\ Y & & \end{array}$$

ここで, $\beta_1 : D(X/Y) \longrightarrow Y$ は double covering, $\beta_2 : X \longrightarrow D(X/Y)$ は cyclic n covering である. 我々の strategy は π を直接扱うのではなく $D(X/Y)$ を介して $D(X/Y)$ を捉えようというものである. まず最初の命題は次の通り

命題 1.1 $f : Z \longrightarrow Y$ は 非特異射影多様体 Y 上の double covering で 非特異かつ f は finite とする. f から決まる Z の involution をσ で表す. D_1, D_2, D_3 を Z 上の effective divisor , n は 3 以上の奇数とし, さらに次の 3 条件を満たすとする.

1. D_1 と $\sigma^* D_1$ は共通成分を持たない.
2. $D_1 = \sum_i a_i D_i^{(1)}$ で既約成分への分解とするとき, すべての i に対し, $0 < a_i \leq \frac{n-1}{2}$ であり a_i 達, および n の最大公約数は 1 である.
3. $D_1 + nD_2 \sim \sigma^* D_1 + nD_3$, $\sim$ は線型同値を表す.

このとき Y の dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ covering X で (i) $D(X/Y) = Z$, (ii) $\Delta(X/Y) = \Delta(Z/Y) \cup f(Supp(D_1))$ を満たすものが存在する.

上記の命題は covering を構成するための定理であるが, 実は, 上の主張の逆もほぼ成立する.

命題 1.2. $\pi : X \longrightarrow Y$ は dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ ($n \geq 3$: 奇数) covering で $D(X/Y)$ は非特異なものとし, σ はβ_1 から決まる involution を表すとする. このとき, $D(X/Y)$ 上の effective divisor D_1, D_2, D_3 で次の 4 条件を満たすものが存在する.

1. D_1 と $\sigma^* D_1$ は共通成分を持たない.

2. $D_1 = \sum_i a_i D_i^{(1)}$ で既約成分への分解とするとき，すべての i に対し，$0 < a_i \leq \frac{n-1}{2}$ である．

3. $D_1 + nD_2 \sim \sigma^* D_1 + nD_3$ かつ $D_2 + \sigma^* D_2 \sim D_3 + \sigma^* D_3$.

4. $\mathrm{Supp}(D_1 + \sigma^* D_1)$ は β_2 の branch locus.

命題 1.1, 1.2 の証明については [T] を参照されたい．

命題 1.2 の系として次が得られる．

系． $\pi : S \longrightarrow \Sigma$ は 非特異な射影曲面 Σの dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ ($n \geq 3$:奇数) covering とする．$\Delta(D(S/\Sigma)/\Sigma)$ は β_1 の branch locus D は$\Delta(S/\Sigma) \setminus \Sigma$ の既約成分とすると，D と$\Delta(D(S/\Sigma)/\Sigma)$ は各交点で重複度 2 以上で交わる．

§2 定理 1 の証明の概略.

$\pi : S \longrightarrow \mathbf{P}^2$ は $\mathbf{P}^2$ の dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ covering で Introductin の仮定 1, 2 を満たす 既約 6 次曲線 B に沿って分岐するものとする．この場合 $\beta_1 : D(S/\Sigma) \longrightarrow \Sigma$ は B に沿って分岐する．B は特異点を持つので $D(S/\Sigma)$ は特異点を持つ．従って，前節の結果をそのまま提供することはできない．そこで dobule covering $\beta_1 : D(S/\Sigma) \longrightarrow \Sigma$ の canonical resolution

$$\begin{array}{ccc} D(S/\Sigma) & \leftarrow & \mathcal{E} \\ \beta_1 \downarrow & & \tilde{\beta}_1 \downarrow \\ \mathbf{P}^2 & \leftarrow & \Sigma \end{array}$$

ここで $\Sigma \to \mathbf{P}^2$ は有限回の blowing-up の合成である．詳しくは [H] 参照．$\tilde{S}$ を $\mathcal{E}$ の $\mathbf{C}(S)$-normalization として$\tilde{\beta}_2 : \tilde{S} \to \mathcal{E}$ を covering map とすれば合成写像 $\tilde{\beta}_2 \circ \tilde{\beta}_1$ は Σ の dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ covering で次の条件 (*) を満たす．

$$(*) \Delta(\tilde{S}/\mathcal{E}) \subset \text{exceptional divisors arising from the resolution}$$

さて，定理 1 を証明するため，命題 1.2 を dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ covering $\tilde{S} \to \Sigma$ に適用する．しかしながら，命題 2 の effective divisors が満たす条件は check するのが相当面倒に見える．そこで，議論を見通しよく行なうために，$\mathcal{E}$ に次のような楕円曲面の構造が入ることに注目する．

B の triple point x をひとつ固定する．x を通る直線 l は B が 6 次曲線であることを考えれば，B と x 以外の 3 点で交わる．l を一般にとればこれらの 3 点は相異なる．従って，l は $\mathcal{E}$ で楕円曲線を定める．l を色々と動かすことにより および x から現れる exceptional divisors の様子を眺めることにより，$\mathcal{E}$ には section を持つ楕円曲面の構造が入ることがわかる．これを [P] に従い standard fibration centered at x と呼ぶ．

$\varphi : \mathcal{E} \to \mathbf{P}^1$ で standard fibration centered at x を表す．さて，canonical resolution $\mathcal{E} \to D(S/\Sigma)$ の作り方から exceptional divisors は φ の singular fiber および 上記の説明に出てきた x に対応する特異点の resolution から決まる section s_0 に含まれる．従って条件 (*), と §1 の 系から $\tilde{\beta}_2$ の branch locus の既約成分はすべて φ の singular fiber の既約成分で s_0 と交わらないものになることがわかる．そこで 命題 1.2 の条件を楕円曲面の singular fiber の既約成分の言葉で書き直して，[S]， Theorem 1.3 を適用すれば， [T] §4 CLAIM と同様の議論を少し精密に行なえば次の事実がわかる．

命題 2.1. $\pi : S \to \mathbf{P}^2$ は dihedral $\mathcal{D}_{2n}$ ($n \geq 3$: 奇数) covering で Introduction の仮定 1, 2 を満足する既約 6 次曲線に沿って分岐するものとする．$\varphi : \mathcal{E} \to \mathbf{P}^1$ は上で導入した楕円曲面とするとき $\mathcal{E}$ の Mordell-Weil 群 $MW(\mathcal{E})$ は位数 n の torsion を持つ．

命題 2.1 から楕円曲面 $\mathcal{E}$ は非常に限られたものになることがわかる．特に今の場合，B の次数が 6 であることと仮定 2 から $\mathcal{E}$ は K3 曲面である．従って [C], Theorem 2.2 より $\mathcal{E}$ の torsion で奇数位数のものの位数は 3, 5, 7 に限られることがわかる． 従って残るは dihedral $\mathcal{D}_{10}$ covering と dihedral $\mathcal{D}_{14}$ covering が存在しないことを示せばよいが，これらの場合は楕円曲面の singular fiber の configuration の可能性が比較的少ないことがわかるので各場合をしらみつぶしに消去してゆくことによってこれらの場合がおこらないことがわかるが繁雑になるのでここでは略すことにする．詳細は現在準備中の論文を参照されたい．

§3 定理 2 の証明の概略.

記号は前のものを踏襲する. 前節の命題 2.1 によれば dihedral $\mathcal{D}_6$ covering があれば $\mathcal{E}$ の $MW(\mathcal{E})$ は位数 3 の torsion を持つことがわかるが, B の index が 19 のときは実はこの逆が成立する. すなわち,

命題 3.1. B は Introduction 仮定 1, 2 を満足する既約な maximizing sextic とする. $\mathcal{E}$ は前節同様, B に沿って分岐する double covering の canonical resolution を表す. x を B の triple point としし $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbf{P}^1$ で standard fibration centered at x を表す. もし楕円曲面 $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbf{P}^1$ が位数 3 の torsion を持てば, dihedral $\mathcal{D}_6$ covering $\pi : S \to \mathbf{P}^2$ で$\Delta(S/\mathbf{P}^2) = B$ となるものが存在する.

証明のアイデア: (i) s で order 3 の torsion を表す. [S] Lemma 8.1 の (8.2) を用いて s がどの様な divisor に $\mathbf{Q}$-線型同値になるか調べる.

(ii) その同値を書き直して 命題 1.1 の条件を満たすような effective divisor D_1, D_2, D_3 を見つける.

さて, 上記の命題により B が maximizing であるときは covering の存在が elliptic K3 曲面の 3 torsion の存在と同値であることがわかる. 3 torsion が存在するための十分条件としては次のものがある.

命題 3.2. $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbf{P}^1$ は extremal 楕円 K3 曲面 (Picard 数 $\rho(\mathcal{E}) = 20$ かつ $rankMW(\mathcal{E}) = 0$) のとき, singular fiber で type が IV, IV^*, または $I_{3k}(k \geq 1)$ であるものが 3 つ以上あれば $MW(\mathcal{E})$ は位数 3 の torsion を持つ.

この命題の証明は [M-P] Proposition 4.4 の証明を上の条件の場合に少し modify して得られるが本質的には同じなのでここでは略す.

さて, 定理 2 の B に沿って分岐する double covering の canonical resolution $\mathcal{E}$ が命題 3.2 の条件を満たすかということが問題となるが, standard firatin centered at x が extremal であることは [P] p. 283 Corollary よりわかる. また, singular fiber に関する条件は canoical resolution を丁寧にみれば容易に check できる.

最後に定理 2 の条件を満たす maximizing sextic で存在がわかっているものの例 (特異点の形状) をいくつか挙げる:

1. e_6, e_6, e_6, a_1,

2. e_6, a_2, a_2, a_2, a_5,

3. e_6, a_2, ~~a_1,~~ a_{11}

4. e_6, a_2, a_3, a_5, a_8,

5. e_6, a_2, a_2, a_8, a_1,

6. d_5, a_2, a_2, a_2, a_8

上記の曲線の存在は直接ではなくむしろ，楕円 K3 曲面の存在からわかる．

References:

[B] E.A. Bartolo: Sur les couple de Zariski, J. Algebraic Geometry 3, 223-247 (1994)

[C] D.A. Cox: Mordell-Weil groups of elliptic curves over $\mathbf{C}(t)$ with $p_g = 0$ or 1, Duke Math. J., 49, 677-689 (1982).

[H] E. Horikawa: On deformation of quintic surfaces, Invent. Math. 31, 43 - 85 (1975)

[M-P] R. Miranda and U. Persson: Configuratin of I_n Fibers on Elliptic K3 surfaces, Math. Z. 201, 339 - 361 (1989).

[P] U. Persson: Double sextics and singular K3 surfaces, Springer LNM 1124, 262-328.

[S] T. Shioda: On the Mordel-Weil lattices, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli 39, 211-240 (1990).

[T] H. Tokunaga: On dihedral Galois coverings, Canadian J. of Math., to appear.